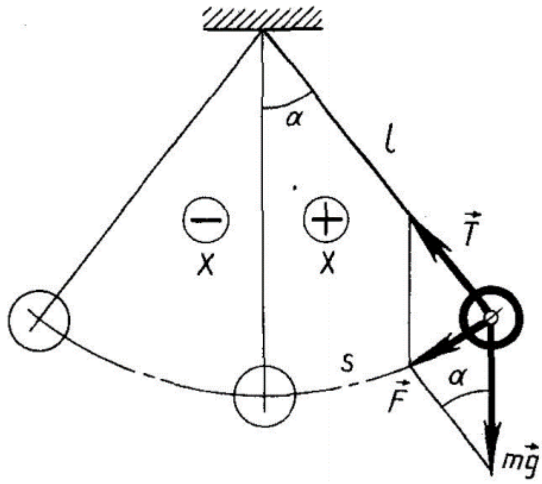
ОК-2

Свободные колебания математического маятника

Математический маятник — модель — материальная точка, подвешенная на нерастяжимой невесомой нити.



Запись движения колеблющейся точки как функции времени.

Выведем маятник из положения равновесия. Равнодействующая (тангенциальная)

$F_T = -mg\sin(\alpha)$, т. е. $F_т$— проекция силы тяжести на касательную к траектории тела. Согласно второму закону динамики

$ma_т = F_T$.

Так как угол α очень мал, то

$$ma_т = -mg\sin(\alpha).$$

Отсюда

$$a_т = g\sin(\alpha),\ \sin(\alpha) = \alpha = s/L,$$

$$a_т = g\frac{S}{L}$$

$$\frac{g}{L} = const.$$

Следовательно, a~s в сторону равновесия.

Ускорение a материальной точки математического маятника пропорционально смещению s.

Таким образом, уравнение движения пружинного и математического маятников имеют одинаковый вид: a~x.

Период колебания

Пружинный маятник

Предположим, что собственная частота колебаний тела, прикрепленного к пружине, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

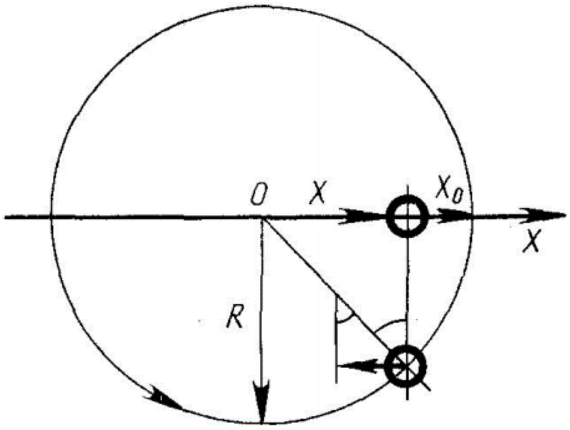
Период свободных колебаний $T = \frac{1}{\nu}$

Циклическая частота $\omega = 2\pi\nu$

Следовательно, $T = \frac{2\pi}{\nu}$

Получаем $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Математический маятник



Собственная частота математического маятника $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

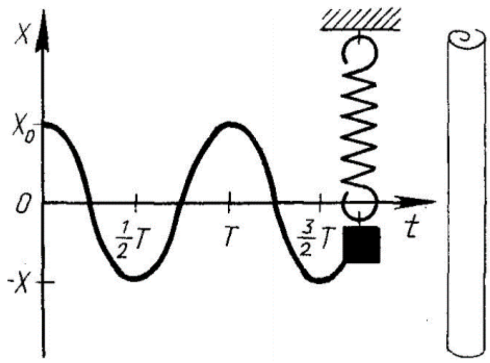
Циклическая частота $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}, \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$.

Следовательно, $\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Законы колебаний математического маятника

1. При небольшой амплитуде колебаний период колебания не зависит от массы маятника и амплитуды колебаний.
2. Период колебания прямо пропорционален корню квадратному из длины маятника и обратно пропорционален корню квадратному из ускорения свободного падения.

Гармонические колебания



Простейший вид периодических колебаний, при которых периодические изменения во времени физических величин происходят по закону синуса или косинуса, называют гармоническими колебаниями:

$$x = x_0 sin(\omega t);$$

$$x = x_0 cos(\omega t + \varphi_0);$$

где x — смещение в любой момент времени; x_0 — амплитуда колебаний; $\omega t + \varphi_0$ — фаза колебании; φ_0 — начальная фаза.

Уравнение $x = x_0 cos(\omega t + \varphi_0)$;

описывающее гармонические колебания, является решением дифференциального уравнения $x'' + \omega^2 t = 0$.

Дважды продифференцировав это уравнение, получим

$$x' = -\omega x_0 sin(\omega t + \varphi_0);$$

$$x'' = -\omega^2 x_0 cos(\omega t + \varphi_0);$$

$$\omega^2 x_0 cos(\omega t + \varphi_0) - \omega^2 x_0 cos(\omega t + \varphi_0)=0;$$

Если какой-либо процесс можно описать уравнением $x" + \omega^2 t = 0$, то совершается гармоническое колебание с циклической частотой ω и периодом $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$.

Таким образом, при гармонических колебаниях скорость и ускорение также изменяются по закону синуса или косинуса.

Так для скорости:

$$v_x = x' = (x_0 cos\omega t)' = -\omega x_0 sin\omega t,$$

или

$$v = \omega x_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = v_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

где $v_0 = \omega x_0$ – амплитудное значение скорости.

Преобразование энергии при гармонических колебаниях

Если колебания тела происходит по закону: $x = x_0 sin(\omega t + \varphi_0)$, то *кинетическая энергия тела равна:*

$$W_k = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{mx_0^2 cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2}.$$

Потенциальная энергия тела равна:

$$W_\text{п} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_0^2 sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}.$$

Так как $k = m\omega^2$, то

$$W_\text{п} = \frac{mv^2 x_0^2 sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}.$$

За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии выбирается положение равновесия тела (x = 0).

Полная механическая энергия системы равна:

$$W_0 = W_k + W_\text{п} = \frac{m\omega^2 x_0^2}{2}.$$